Por que o teste estrela funciona?

Observações preliminares

A lógica silogística estuda argumentos cuja validade dependem de "todo", "nenhum", "algum" e noções similares. Ao simbolizar esses argumentos, usamos letras maiúsculas para categorias gerais (como "lógico") e letras minúsculas para indivíduos específicos (como "Gensler"). Também usamos cinco palavras: "todo", "nenhum", "algum", "é" e "não". Esse vocabulário pode ser combinado para formar "fbfs" ou sequências gramaticais. A **fbf** (**fórmula bem formada**) é uma sequência que possui qualquer uma dessas oito formas (formas as quais aceitam o uso de outras letras maiúsculas e outras letras minúsculas):

todo A é B algum A não é B	algum A é B nenhum A é B	x é A x não é A	x é y x não é y

Para uso posterior, perceba que as duas formas em cada pequeno quadrado são **contraditórias,** o que significa que elas devem ter valores de verdade opostos.

Um **silogismo** é uma série de uma ou mais fbfs no qual cada letra ocorre duas vezes e as letras "formam uma cadeia" (cada fbf tem, pelo menos, uma letra em comum com a fbf logo abaixo dela, se há uma única, e a primeira fbf tem pelo menos uma letra em comum com a última fbf). A última fbf em um silogismo é a **conclusão**. As outras fbfs (quaisquer que sejam) são **premissas**. Aqui estão dois exemplos de silogismos:

nenhum P é B algum C é B ∴ algum C não é P	a é F a é G ∴ algum F é G

Uma instância de uma letra é **distribuída** em uma fbf se ela ocorre apenas após “todo” ou em qualquer lugar após “nenhum” ou “não”. As letras distribuídas aqui são sublinhadas:

todo $\underline{A}$ é B algum A não é $\underline{B}$	algum A é B nenhum $\underline{A}$ é B	x é A x não é $\underline{A}$	x é y x não é $\underline{y}$

O **teste estrela** para silogismos possui dois passos:

1. Letras premissas marcadas com estrelas que são distribuídas e letras de conclusão que não são distribuídas.
2. Então, o silogismo é VÁLIDO se e somente se cada letra maiúscula é marcada com estrela **exatamente** uma única vez e há **exatamente** uma única estrela no lado direito.

Uma estratégia é primeiro sublinhar todas as letras distribuídas - e então marcar com estrela as letras de premissa que são sublinhadas e letras de conclusão que não são sublinhadas. Três exemplos são dados aqui:

nenhum $\underline{P}^*$ é $\underline{B}^*$ algum C é B ∴ algum C^* não é $\underline{P}$	Válido - cada letra maiúscula é marcada com estrela apenas uma vez e uma estrela no lado direito apenas
nenhum $\underline{P}^*$ é $\underline{B}^*$ algum C não é $\underline{B}^*$ ∴ algum C^* é P^*	Inválido - P e B são marcados com estrela duas vezes e há três estrelas do lado direito
a é F a é G ∴ algum F^* é G^*	Válido - a razão da validade é de que letras minúsculas podem ser marcadas com estrela vário número de vezes

O teste estrela fornece um rápido e fácil artifício para testar a validade de um silogismo. Mas, por que o teste estrela funciona? Por que ele dá a resposta correta sobre a validade e a invalidade de um silogismo? Para dar uma resposta a isso, primeiro precisamos aprender sobre antilogismos.

Antilogismos

Um **antilogismo** é uma série de uma ou mais fbfs nas quais cada letra ocorre duas vezes e as letras "formam uma cadeia" (conforme explicado acima). Todo **silogismo** possui um **antilogismo** correspondente; suas proposições são iguais exceto pelo fato de que as últimas proposições são contraditórias uma com a outra. Aqui está um exemplo:

SILOGISMO	ANTILOGISMO
Todo M é P Todo S é M ∴ Todo S é P	Todo M é P Todo S é M ∴ algum S não é P

Agora para dizer que um argumento é válido significa que seria impossível (*inconsistente*) ter todas as suas premissas verdadeiras e sua conclusão falsa. Assim, um silogismo é *válido* se e somente se seu antilogismo é *inconsistente*.

Espelhando **o teste estrela para silogismo**, temos **um teste de antilogismo**, que consiste em:

1. Sublinhe as letras distribuídas no antilogismo.
2. Feito isso, o antilogismo é INCONSISTENTE se e somente se cada letra maiúscula é sublinhada **exatamente** uma única vez e há **exatamente** uma única letra sublinhada do lado direito.

Aqui está um exemplo de teste, usando *o teste estrela para silogismos* e o *teste de antilogismo*:

SILOGISMO (válido)	ANTILOGISMO (inconsistente)
todo $\underline{M}^*$ é P	todo $\underline{M}$ é P
todo $\underline{S}^*$ é M	todo $\underline{S}$ é M
∴ todo $\underline{S}$ é P^*	algum S não é $\underline{P}$

Perceba como os dois testes espelham um ao outro:

- O silogismo é VÁLIDO no teste estrela, porque cada letra maiúscula é marcada com estrela exatamente uma única vez e há exatamente uma única estrela no lado direito.

- O antilogismo é INCONSISTENTE no teste de antilogismo, porque cada letra maiúscula é sublinhada exatamente uma única vez e há exatamente uma única letra sublinhada no lado direito.

O teste de antilogismo é mais simples. O teste de antilogismo trata todas as proposições da mesma maneira, enquanto o teste estrela tem que marcar com estrela a conclusão de forma diferente de modo a prover o mesmo resultado. O teste estrela funciona porque o teste de antilogismo funciona. E podemos mostrar que o teste estrela funciona ao mostrar que o teste de antilogismo funciona.

Mostrando que o teste de antilogismo funciona

Vamos supor que nós temos um antilogismo no qual sublinhamos apenas as letras distribuídas. Então, de acordo com o teste, o antilogismo será INCONSISTENTE se e somente se duas condições se verificarem:

1. cada letra maiúscula é sublinhada exatamente uma única vez e

2. há exatamente uma única letra sublinhada no lado direito.

Note que, se a segunda condição é verificada, logo o antilogismo terá exatamente uma única proposição negativa (já que apenas as proposições negativas possuem uma letra sublinhada do lado direito).

Nós vamos examinar três grupos de antilogismos: a) aqueles apenas com letras maiúsculas; b) aqueles apenas com letras minúsculas e; c) aqueles tanto com letras maiúsculas e minúsculas. Tentaremos mostrar, para cada grupo, que os antilogismos daquele grupo são inconsistentes se e somente se eles satisfazem as duas condições do teste de antilogismo. Se mostrarmos isso, então, uma vez que cada antilogismo pertente a um dos grupos, mostraremos que *qualquer* antilogismo é inconsistente se e somente se satisfaz essas duas condições.

Antilogismo apenas com letras maiúsculas

Agora tentaremos mostrar que o teste de antilogismo funciona para antilogismos apenas com letras maiúsculas. Para ajudar nessa demonstração, desenvolveremos um procedimento de prova que é adequado para mostrar a inconsistência de qualquer um dos antilogismos que são de fato inconsistentes.

Nosso procedimento de prova em primeiro lugar leva em conta cada proposição no antilogismo que começa com "algum" e a substitui com um par de proposições. Para cada proposição da forma "algum A é B", substituímos por um par de proposições da forma "x é A" e "x é B", em que usamos letras minúsculas para "x" que não ocorreram ainda no antilogismo. E para cada proposição da forma "algum A não é B", substituímos por um par de proposições da forma "x é A" e "x não é B", em que usamos uma letra minúscula "x" que ainda não tenha ocorrido no antilogismo. Seguindo esse procedimento, iríamos do antilogismo encontrado no meio da caixa para o da direita:

SILOGISMO (válido)	ANTILOGISMO (original)	ANTILOGISMO (modificado)
todo $\underline{M}^*$ é P todo $\underline{S}^*$ é M ∴ todo $\underline{S}$ é P*	todo $\underline{M}$ é P todo $\underline{S}$ é M algum S não é $\underline{P}$	todo $\underline{M}$ é P todo $\underline{S}$ é M a é S a não é $\underline{P}$

(Note que essa modificação não muda que letras maiúsculas são sublinhadas.) Agora o antilogismo original será consistente se e somente se o então modificado antilogismo é consistente.

Nosso procedimento de prova então deriva proposições adicionais do então modificado antilogismo usando estas quatro regras de inferência (que valem para qualquer letra minúscula "x" e qualquer maiúscula "F" e "G"):

todo $\underline{F}$ é G, x é F ⇒ x é G
todo $\underline{F}$ é G, x não é $\underline{G}$ ⇒ x não é $\underline{F}$
nenhum $\underline{F}$ é $\underline{G}$, x é F ⇒ x não é $\underline{G}$
nenhum $\underline{F}$ é $\underline{G}$, x é G ⇒ x não é $\underline{F}$

Essas quatro regras resultam nas únicas formas de inferência válidas que são embasadas em uma combinação de proposição universal e uma proposição que começa com uma letra minúscula. Usando essas regras:

- Pelo menos uma premissa tem que ser positiva.
- Se ambas as premissas são positivas, então do mesmo jeito é a conclusão.
- Se pelo menos uma premissa é negativa, então a conclusão é negativa.
- A letra maiúscula comum a ambas às premissas tem que ser sublinhadas exatamente uma única vez.
- A letra maiúscula na conclusão herda seu estado de ser sublinhada das premissas.

Se tomarmos em consideração o antilogismo modificado acima, podemos usar essas quatro regras para derivar uma contradição:

SILOGISMO (válido)	ANTILOGISMO (original)	ANTILOGISMO (modificado)	Inferências adicionais:
todo $\underline{M}^*$ é P todo $\underline{S}^*$ é M ∴ todo $\underline{S}$ é P^*	todo $\underline{M}$ é P todo $\underline{S}$ é M algum S não é $\underline{P}$	todo $\underline{M}$ é P todo $\underline{S}$ é M a é S a não é $\underline{P}$	∴ a é M {a partir das linhas 2 e 3} ∴ a é P {a partir de "a é M" e da linhas 1} - a isso contradiz a linha 4

Aqui está um exemplo usando duas proposições:

SILOGISMO (válido)	ANTILOGISMO (inconsistente)	ANTILOGISMO (modificado)	Inferências adicionais:
nenhum $\underline{A}^*$ é $\underline{B}^*$ ∴ nenhum $\underline{B}$ é $\underline{A}$	nenhum $\underline{A}$ é $\underline{B}$ algum B é A	nenhum $\underline{A}$ é B x é B x é A	∴ x não é $\underline{A}$ { a partir das linhas 1 e 2} - e isso contradiz a linha 3

Aqui está um exemplo usando uma única proposição:

SILOGISMO (válido)	ANTILOGISMO (inconsistente)	ANTILOGISMO (modificado)	Inferências adicionais:
∴ todo $\underline{A}$ é A*	algum A não é $\underline{A}$	x é A x não é $\underline{A}$	desnecessárias, já que as linhas 1 e 2 se contradizem

E aqui está um exemplo usando quatro proposições:

SILOGISMO (válido)	ANTILOGISMO (inconsistente)	ANTILOGISMO (modificado)	Inferências adicionais:
algum A é B todo $\underline{B}^*$ é C nenhum $\underline{C}^*$ é $\underline{D}^*$ ∴ algum A^* não é $\underline{D}$	algum A é B todo $\underline{B}$ é C nenhum $\underline{C}$ é $\underline{D}$ todo $\underline{A}$ é D	x é A x é B todo $\underline{B}$ é C nenhum $\underline{C}$ é $\underline{D}$ todo $\underline{A}$ é D	∴ x é C { a partir de 2 e 3} ∴ x não é $\underline{D}$ { a partir de "x é C" e de 4} ∴ x não é $\underline{A}$ { a partir de "x não é D" e 5} - e isso contradiz a linha 1

Um antilogismo apenas com letras maiúsculas é inconsistente e pode ser mostrado ser inconsistente pela nossa estratégia de prova, se e somente se essas três condições para antilogismo se verificam:

1. Exatamente uma proposição deve começar com "algum".
   [Se mais de uma proposição começa com "algum", então nosso antilogismo modificado usará duas letras minúsculas, talvez "a" e "b", e no melhor dos casos derivaremos "a é P" e "b não é P" - o que não é uma contradição. Se nenhuma proposição começa com "algum", então não podemos derivar qualquer coisa

usando nossas quatro regras de inferência; e as proposições de antilogismo seriam consistentes - uma vez que seriam verdadeiras em um mundo possível no qual "a" teria nenhuma das propriedades representadas pelas letras maiúsculas.]

2. Há exatamente uma única proposição negativa.
   [Se há nenhuma proposição negativa no antilogismo, logo não podemos derivar qualquer contradição - uma vez que nossas regras derivam uma proposição negativa somente a partir de outra proposição negativa e precisamos de uma proposição negativa e uma proposição positiva para obter uma contradição. Se há duas ou mais proposições negativas, então de novo não podemos derivar uma contradição - uma vez que nossas regras não permite derivar qualquer coisa a partir de duas proposições negativas e assim a cadeia requerida de inferências ficaria quebrada.]

3. Cada letra maiúscula é distribuída exatamente uma única vez.
   [A qualquer momento que usamos uma de nossas quatro regras de inferências, a letra maiúscula comum a ambas as premissas tem que ser distribuídas de maneira oposta em cada premissa. Assim, se alguma letra maiúscula não é distribuída exatamente uma única vez, então outra vez a requerida cadeia de inferências ficaria quebrada.]

Essas condições espelham o teste de antilogismo. Vimos que (2) é equivalente a "há exatamente uma única letra sublinhada no lado direito" (já que apenas as proposições negativas possuem uma letra sublinhada no lado direito) e (3) é equivalente a "cada letra maiúscula é sublinhada exatamente uma única vez". Mas, e quanto a (1) - a condição que diz que exatamente uma proposição deve começar com "algum"?

Essa condição é garantida pelas outras condições. Suponha que cada letra maiúscula é sublinhada exatamente uma única vez e há exatamente uma única letra sublinhada do lado direito. Logo tem que haver exatamente uma proposição com uma letra maiúscula do lado esquerdo que não é sublinhada (visto que de outra forma alguma letra seria sublinhada duas vezes). Portanto há de haver exatamente uma proposição que começa com "algum" (já que apenas as proposições que começam com "algum" tem uma letra do lado esquerdo que não é sublinhada).

Seja ANT um antilogismo apenas com letras maiúsculas. ANT é inconsistente se e somente se satisfaz as três condições que acabamos de assinalar. Mas, ANT será chamada de "inconsistente" no teste de antilogismo se e somente se satisfaz essas três condições. Portanto, ANT é inconsistente se e somente se for chamada de "inconsistente" no teste de antilogismo. Assim o teste de antilogismo funciona para antilogismos apenas com letras maiúsculas

Antilogismos apenas com letras minúsculas

Agora tentaremos mostrar que o teste de antilogismo funciona para antilogismos apenas com letras minúsculas. Para nos ajudar mostrar isso, precisamos alargar nossa estratégia de prova. Precisamos adicionar uma regra de inferência sobre proposições da forma "a é b":

Dado "a é b", podemos mudar "a" e "b" em qualquer proposição

Dessa maneira, se temos "a é F" e também temos "a é b", logo podemos derivar "b é F". E se temos "c não é b" e também temos "a é b", logo podemos derivar "c não é a". No que diz respeito às quatro regras de inferência antes apresentadas:

- Pelo menos uma premissa tem que ser positiva (a premissa "a é b").
- Se ambas as premissas são positivas, então assim é a conclusão.
- Se pelo menos uma premissa é negativa, assim é a conclusão.
- Qualquer letra maiúscula na conclusão herda o estado de estar sublinhada das premissas

Entretanto, a letra minúscula comum a ambas as premissas não precisam ser sublinhadas exatamente uma única vez. (Disso resulta a razão pela qual nosso teste requer letras maiúsculas (não letras minúsculas), que são marcadas com estrela ou sublinhadas exatamente uma vez).

Até agora, *derivar uma contradição* envolveu derivar um par de proposições da forma "x é A" e "x não é A". Mas agora derivar uma autocontradição "a não é a" será uma segunda maneira de derivar uma contradição.

Podemos usar essas regras para derivar uma contradição a partir deste antilogismo de duas linhas apenas com letras minúsculas:

SILOGISMO (válido)	ANTILOGISMO (inconsistente)	Inferências adicionais:
a é b ∴ b^* é a^*	a é b b não é <u>a</u>	∴ a não é <u>a</u> {a partir da linha 2 usando a linha 1} - e isso é uma autocontradição

E aqui está como nosso exemplo opera para um antilogismo de uma linha apenas com letras minúsculas:

SILOGISMO (válido)	ANTILOGISMO (inconsistente)	Inferências adicionais:
∴ a^* é a^*	a não é <u>a</u>	desnecessárias, já que a linha é uma autocontradição

Um antilogismo apenas com letras minúsculas é inconsistente e pode ser mostrado ser inconsistente pela nossa estratégia de prova se e somente se tem exatamente uma única premissa negativa. E isso espelha a condição do teste de antilogismo que diz que "há exatamente uma única letra sublinhada no lado direito" (dado que apenas as proposições negativas possuem uma letra sublinhada do lado direito). Nos antilogismos apenas com letras minúsculas, a outra condição do teste de antilogismo (a que diz que cada letra maiúscula deve ser sublinhada exatamente uma única vez) é automaticamente satisfeita, uma vez que há nenhuma letra maiúscula.

Seja ANT um antilogismo apenas com letras minúsculas. ANT é inconsistente se e somente se ele possui exatamente uma única proposição negativa. Mas ANT será chamada "inconsistente" no teste de antilogismo se e somente se ele possui exatamente uma única proposição negativa. Logo, ANT é inconsistente se e somente se ele será chamado de inconsistente no teste de antilogismo. Assim o teste de antilogismo funciona para antilogismos apenas com letras minúsculas.

Antilogismos tanto com letras minúsculas e maiúsculas

Agora tentaremos mostrar que o teste de antilogismo funciona para antilogismos tanto com letras maiúsculas quanto minúsculas. Para nos ajudar mostrar isso, usamos o procedimento de prova que desenvolvemos nas duas seções anteriores.

Aqui está a maneira pela qual podemos usar esse procedimento num antilogismo mais longo tanto com letras minúsculas quanto maiúsculas:

SILOGISMO (válido)	ANTILOGISMO (INCONSISTENTE)	Inferências adicionais:
x é A y é X y é B todo B é C ∴ algum A é C	x é A y é X y é B todo <u>B</u> é C nenhum <u>A</u> é <u>C</u>	∴ x é B { a partir da linha 3 usando a linha 2} ∴ x é c { a partir de "x é B" e 4} ∴ x não é <u>A</u> {a partir de "x é C" e 5} - e isso contradiz a linha 1

Um antilogismo tanto com letras minúsculas quanto maiúsculas é inconsistente e pode ser mostrado inconsistente pela nossa estratégia de prova se e somente se essas duas condições se verificam para o antilogismo:

1. Há exatamente uma única proposição negativa.
   [Se não há proposição negativa no antilogismo, então não podemos derivar qualquer contradição - dado que nossas regras podem derivar uma proposição negativa apenas de outra proposição negativa e precisamos de uma proposição negativa e positiva para obter uma contradição. Se há duas ou mais proposições negativas, então de novo não podemos derivar uma contradição - dado que nossas regras não podem derivar qualquer coisa de duas proposições negativas e assim a requerida cadeia de inferências ficaria quebrada]

2. Cada letra maiúscula é distribuída exatamente uma única vez.
   [Sempre que usamos uma de nossas quatro regras de inferência que envolve uma proposição de "tudo" ou de "nenhum", a letra maiúscula comum a ambas as premissas tem que ser distribuídas de maneira oposta em cada uma delas. Assim se alguma letra maiúscula não exatamente distribuída uma única vez, então de novo a requerida cadeia de inferências quebraria.]

Essas condições espelham o teste de antilogismo. Vimos que (1) é equivalente a "há exatamente uma única letra sublinhada do lado direito" (visto que apenas as proposições negativas possuem uma letra sublinhada do lado direito). E (2) é equivalente a "cada letra maiúscula é sublinhada exatamente uma única vez".

Uma implicação dessas duas condições é que os antilogismos tanto com letras minúsculas quanto maiúsculas, para serem inconsistentes e serem capazes de serem mostrados inconsistentes pela nossa estratégia de prova, não devem conter um "algum" ou uma proposição da forma "x não é y". Poupo vocês dos complexos detalhes.

Seja ANT um antilogismo tanto com letras minúsculas quanto maiúsculas. ANT é inconsistente se e somente se ele satisfaz as duas condições há pouco indicadas. Mas ANT será chamada de "inconsistente" no teste de antilogismo se e somente satisfaz essas duas condições. Logo, ANT é inconsistente se e somente se for chamada de "inconsistente" no teste de antilogismo. Assim o teste de antilogismo funciona para antilogismos tanto com letras minúsculas quanto maiúsculas.

Por que o teste estrela funciona

As últimas três seções mostraram que o teste de antilogismo funciona para os três grupos de antilogismos: a) os que têm apenas letras maiúsculas; b) os que têm apenas letras minúsculas; c) os que têm tanto letras minúsculas quanto maiúsculas. Assim o teste de antilogismo funciona para *todos* os antilogismos.

Dado que o teste de antilogismo funciona, podemos argumentar que o teste estrela funciona.

Seja SYL um silogismo qualquer e ANT seu correspondente antilogismo. SYL é válido se e somente se ANT é inconsistente. ANT é inconsistente se e somente se ele será chamado de "inconsistente" no teste de antilogismo. Mas ANT será chamado de "inconsistente" no teste de antilogismo se e somente se SYL for chamado "válido" no teste estrela. Logo, SYL é válido se e somente se for chamado de "válido" no teste estrela.

Assim o teste estrela funciona.

E o teste estrela funciona, de novo, em razão de que o teste de antilogismo funciona e porque o teste estrela é justamente uma forma indireta de fazer o teste de antilogismo.

Colocando as coisas de forma mais simples, o teste estrela checa se, ao substituir a conclusão com seu contraditório, teríamos cada letra maiúscula distribuída exatamente uma única vez e exatamente uma única proposição negativa - o que são precisamente as condições necessárias para derivar uma contradição.

Comentários adicionais

O teste estrela é minha invenção. Eu o propus em um artigo de 1973 no *Jornal Notre Dame de Lógica Formal* (clique aqui ou aqui para fazer o download desse arquivo em formato para Acrobat). Argumentei que o teste estrela, quando aplicado aos silogismos tradicionais, dá os mesmos resultados acerca da validade que aqueles conseguidos com as tradicionais regras medievais.

Christine Ladd-Franklin (1847-1930), uma lógica e psicóloga americana, propôs essa brilhante e útil ideia de antilogismos em 1883 como parte de sua dissertação de doutorado. Infelizmente ela demorou 44 anos para receber seu título de doutorado da Johns Hopkins, mesmo tendo cumprido todos os requisitos, em virtude da faculdade não conceder esse nível de titulação para mulheres. Que coisa!

Professores: se vocês desejam ensinar técnicas de prova com lógica silogística, vocês podem colocar os estudantes para provar que os silogismos são válidos (como determinado pelo teste estrela) usando a técnica de antilogismo explicada aqui. E se você deseja ensinar alguma metalógica sobre silogismos, você pode colocar os estudantes para ler essa Página de Internet e dar uma olhada sobre as ideias básicas nela contida.

Mande um email para mim sobre erros e sugestões (gensler@jcu.edu). Obrigado!

por Harry J. Gensler. Última modificação em 21 de dezembro de 2009.